

Archimedův zákon

Řešení úloh

Autor: Radmila Horáková
Recenze, revize a obrázky: Josef Jírů

Milí studenti, zájemci o fyzikální olympiádu a fyziku vůbec!

Z vlastních dlouholetých pedagogických zkušeností vím, že Archimedův zákon nepatří k nejoblíbenějším a nejjednodušším partiím fyziky – věřím, že pro vás tento zákon nepředstavuje problém, ale určitě nebude na škodu si zopakovat něco z historie, vysvětlit si, proč je nutné formulovat zákon zcela přesně, a prezentovat význam tohoto zákona při řešení úloh. Úlohy si rozdělíme do tří kategorií podle způsobu řešení – v každé kategorii uvedeme tři řešené úlohy a tři úlohy pro samostatnou práci. Všechny úlohy budeme řešit obecně, obecně řešte i úlohy pro samostatnou práci. Zejména ve druhé a třetí části se mohou vyskytnout příklady trochu náročnější na obecné řešení, ale i to je účelem studijního textu. Vyjádření neznámé ze vztahu začíná občas být pro mnohé středoškoláky neřešitelným problémem, a proto nebude na škodu, když si i vy, fyzikálně a matematicky zdatní jedinci, matematické operace procvičíte.

Studijní text nebude nijak rozsáhlý, ale doufám, že pokud si vše pečlivě projdete, nebudete mít s řešením úloh na Archimedův zákon problém. Přeji vám hodně úspěchů při řešení všech příkladů fyzikální olympiády a hodně radosti při studiu fyziky.

Radmila Horáková

1. Troška historie

Římský architekt Vitruvius popisuje notoricky známou historku o objevu zákona takto:

Když se Hieron v Syrakusách povznesl ke královské moci, rozhodl se, že za štěstí, které měl při svém počínání, obětuje v nějaké svatyni zlatý věnec, který zaslíbil nesmrtelným bohům. Dal jej udělat na zakázku a zlato na něj výrobci přesně odvážil. Za nějaký čas předložil výrobce králi vkusně provedené dílo svých rukou k jeho úplné spokojenosti, přičemž se zdálo, že dodržel přesně váhu věnce. Když ovšem později přišlo udání, že zlato bylo ubráno a že do zpracovaného věnce bylo přidáno stříbro, požádal Hieron, rozmrzelý na tím, že byl podveden a že nemůže přijít na to, jak podvod dokázat, Archimeda, aby záležitost vyřešil. Archimedes měl úkol plnou hlavu – řešení mu poskytla náhodná návštěva lázní. Všiml si, že při vstupování do vany z ní vytéká voda podle toho, jak se jeho tělo postupně ponořovalo do vany. Když si uvědomil, že mu to poskytlo odpověď na jeho problém, vyskočil samou radostí z vany, nahý běžel domů a všem lidem radostně zvěstoval jasným hlasem, že objevil, po čem pátral – vykřikoval totiž heuréka, heuréka (přišel jsem na to). Vitruvius dále líčí, jak Archimedes použil kus zlata a stříbra přesně stejné hmotnosti a zjistil jejich objem podle množství vody, které vytěsnil z nádoby. Tak mohl zjistit hustotu zlata, stříbra i věnce a usvědčit klenotníka z nepoctivosti. Zpráva o tom, jak dopadl klenotník, se nezachovala.

Vitruviovo povídání je vcelku dost povrchní a nevysvětluje, jak Archimedes na svůj geniální zákon přišel. Trvalo ještě poměrně dlouho, než arabské a středověké prameny začaly uvádět přesnější způsob určování hustoty látek založený na Archimedově zákonu bez zjišťování objemu tělesa. Nebudeme ale pátrat dále v historii a podíváme se na současné znění Archimedova zákona.

2. Archimedův zákon

V současných učebnicích najdeme následující znění Archimedova zákona:

Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž velikost se rovná tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem ponořené části tělesa.

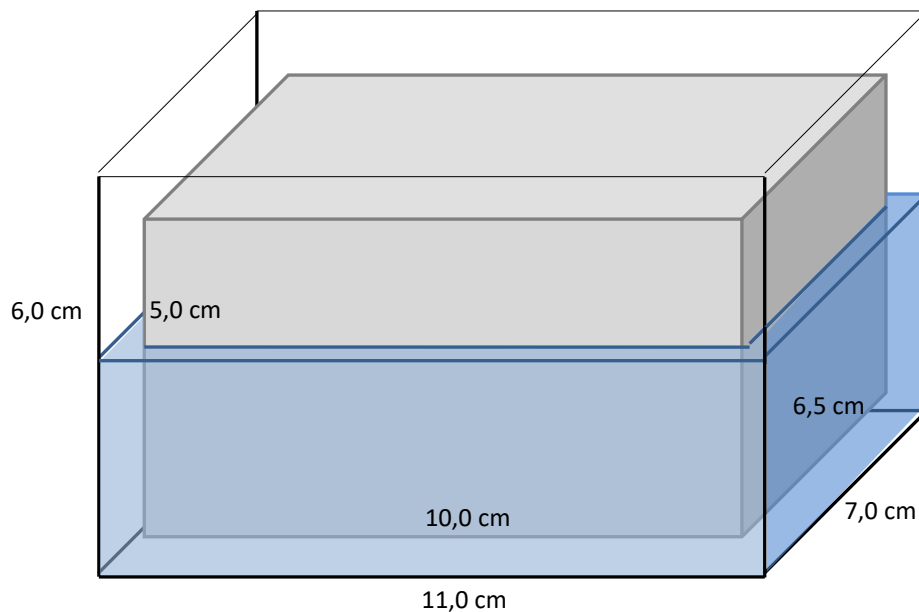
Toto znění je korektní a v této podobě jej využíváme k řešení úloh. V některých starších fyzikálních textech je uveden Archimedův zákon ve velmi podobné, přesto nesprávné podobě:

Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, která se rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.

(Touto formulací si také Archimedův zákon často zjednodušují studenti a v této podobě byl zákon také zhudebněn v jednom starším českém filmu ze studentského prostředí.)

Ve většině případů je ... ***vztlaková síla, jejíž velikost se rovná tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem ponořené části tělesa*** stejná jako ***vztlaková síla, která se rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.*** Ale uvedeme si případ, kdy je mezi velikostmi těchto sil a objemy ponořené části tělesa a vytlačené vody podstatný rozdíl a je třeba řídit se opravdu správným zněním zákona.

Uvedeme nejdříve myšlenkový pokus a potom provedeme konkrétní výpočet. Vezměme si dřevěný hranolek a nádobku, jejíž průřez je jen o málo větší než plošný průřez hranolku. Do nádoby nalejeme jen trošku vody a hranolek do ní ponoříme. Hranolek bude v nádobce plavat – i pouhým pohledem vidíme, že hranolek vytlačí jen trošku vody, jejíž objem určitě neodpovídá objemu ponořené části hranolku – viz obr. Pokud by byl hranolek nadlehčován silou rovnající se tíze kapaliny tělesem vytlačené, nemohl by v nádobce plavat, jeho tíha by byla určitě větší. Ale abychom nedali jen na pohled a odhad, pokusme se tuto úlohu konkretizovat:



Př. Skleněná vanička tvaru kvádru s vnitřními rozměry 11,0 cm x 7,0 cm a výšku 6,0 cm. Do nádoby nalejeme vodu o hustotě $\rho_2 = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ do výšky 1,0 cm a ponoříme do ní dřevěný hranolek o hmotnosti 225 g a průřezu o rozměrech 10,0 cm x 6,5 cm a výšce $h_1 = 5,0$ cm. Dokažte, že objem ponořené části hranolku a objem kapaliny hranolkem vytlačené nejsou stejné.

Řešení:

Hranolek má objem:

$$V_1 = 10 \cdot 6,5 \cdot 5 \text{ cm}^3 = 325 \text{ cm}^3$$

a hustotu

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{225 \text{ g}}{325 \text{ cm}^3} = \frac{9}{13} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Ponoří se do hloubky h , v níž plave a pro kterou platí (tíhová a vztlaková síla se rovnají):

$$mg = \rho_2 S_1 h g \Rightarrow h = \frac{m}{\rho_2 S_1} = \frac{225 \text{ g}}{1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 10 \cdot 6,5 \text{ cm}^2} = \frac{45}{13} \text{ cm}.$$

Objem ponořené části hranolku je

$$V = S_1 h = 10 \cdot 6,5 \cdot \frac{45}{13} \text{ cm}^3 = 225 \text{ cm}^3,$$

objem vytlačené kapaliny je však pouze

$$V' = (S_2 - S_1)h = (11 \cdot 7 - 10 \cdot 6,5) \cdot \frac{45}{13} \text{ cm}^3 = \frac{540}{13} \text{ cm}^3 = 42 \text{ cm}^3.$$

Tedy v uvedeném příkladu není objem kapaliny (který je roven objemu ponořené části tělesa) podle první formulace shodný s objemem vytlačené kapaliny podle druhé formulace.

3. Úlohy řešené pomocí Archimedova zákona I

V této části se budeme věnovat úlohám, kdy bude do kapaliny ponořené těleso o menší hustotě, než je hustota kapaliny. V tomto případě těleso v kapalině tzv. plove a my budeme řešit úlohy na základě rovnováhy pouze dvou sil – tíhové a vztlakové. Budeme teď pro toto zobecnění indexovat veličiny týkající se tělesa číslem 1 a kapaliny číslem 2. Rovnovážný stav můžeme popsat několika způsoby:

$$m_1 g = \rho_2 V' g,$$

$$\rho_1 V_1 g = \rho_2 V' g,$$

kde V' je objem ponořené části tělesa.

Ze vztahů je vidět, že můžeme počítat objem ponořené části tělesa, hustotu tělesa, hustotu kapaliny, hmotnost tělesa nebo objem tělesa, pokud známe ostatní veličiny.

Př. 1

Dřevěné těleso má při vložení do vody ponořené $\frac{3}{4}$ svého objemu. Jaká je hustota dřeva?

Řešení: Označíme $\rho_2 = 1\,000\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, V_1 je objem tělesa, $V' = 3V_1/4$ je objem ponořené části tělesa, $\rho_1 = ?$

$$\rho_1 V_1 g = \rho_2 V' g \Rightarrow \rho_1 V_1 = \rho_2 \frac{3}{4} V_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{3}{4} \rho_2 = 750\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Hustota dřeva je $750\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Př. 2

Těleso o hmotnosti $m_1 = 200\text{ g}$ a objemu $V_1 = 0,25\text{ dm}^3$ je ponořené do kapaliny právě polovinou svého objemu. Určete hustotu ρ_2 kapaliny.

Řešení: Opět platí, že tíhová síla se rovná síle vztlakové:

$$m_1 g = \frac{V_1}{2} \rho_2 g \Rightarrow \rho_2 = \frac{2m_1}{V_1} = 1\,600\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Hustota kapaliny je $1\,600\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Př. 3

Klasická úloha: Jakou nejmenší tloušťku d musí mít ledová kra o obsahu plochy $S_1 = 4,0\text{ m}^2$, která právě unese těleso o hmotnosti $m_1 = 100\text{ kg}$? Hustota ledu je $\rho_1 = 920\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota vody $\rho_2 = 1\,000\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Kra má tvar ploché desky.

Řešení. Má-li kra unést dané těleso, bude její horní plocha v úrovni hladiny vody. Opět platí, že se tíhová a vztlaková síla rovnají.

$$m_1 g + \rho_1 S_1 d g = \rho_2 S_1 d g \Rightarrow d = \frac{m_1}{S_1(\rho_2 - \rho_1)} = 0,31\text{ m}.$$

Tloušťka kry o ploše $4,0\text{ m}^2$, která právě unese těleso o hmotnosti 100 kg , musí mít tloušťku 31 cm .

Úlohy pro samostatnou práci

1. Jakou maximální hmotnost může mít student, který stojí na plovoucí kře, aby se nenamočil? Kru tvoří vrstva ledu s obsahem podstavy $2,0 \text{ m}^2$. Tloušťka kry je 30 cm. Hustota ledu je $920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota vody je $1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
2. Jestliže naložíme na loď náklad o hmotnosti 10 t, zvětší se její ponor o 8,0 cm. Stanovte obsah vodorovného průřezu lodi, jestliže loď kotví v mořské vodě o hustotě $1\,025 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
3. Vložíme-li dřevěný kvádr do nádoby s vodou, ponoří se 60 % svého objemu. Vložíme-li tentýž kvádr do nádoby s olejem, ponoří se 62,5 % svého objemu. Určete hustotu dřevěného kvádrů a hustotu oleje. Počítejte s hustotou vody $1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

4. Úlohy řešené pomocí Archimedova zákona II

Nyní se budeme věnovat úlohám, kdy bude hustota tělesa větší než hustota kapaliny, do které těleso ponoříme. Pokud nechceme, aby těleso leželo na dně, musí na něj kromě vztlačové síly působit síla tahová – těleso je zavěšeno na laně, siloměru, případně jiném závěsu. V tomto případě budeme vždy počítat se třemi silami – síla tíhová musí být v rovnováze se silou vztlačovou a tahovou: $F_G = T + F_{vz}$. Pokud za síly dosadíme, bude vztah pro rovnováhu sil vypadat následovně (ρ_2 je hustota kapaliny, m hmotnost tělesa, V objem ponořené části tělesa):

$$mg = T + \rho_2 Vg.$$

Nabízí se široké spektrum možností, můžeme – pokud známe ostatní veličiny – počítat hmotnost tělesa, hustotu nebo objem tělesa, objem ponořené části tělesa, hustotu kapaliny nebo velikost tahové síly.

Př. 1

Zavěsíme-li těleso na siloměr na vzduchu, ukáže siloměr hodnotu 19,6 N, ponoříme-li těleso celé do vody, bude na siloměru hodnota 15,3 N. Určete hustotu ρ_1 materiálu, ze které je těleso vyrobeno. Hustota vody je $\rho_2 = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení:

Na vzduchu ukazuje siloměr tíhovou sílu, která na těleso působí, tedy $F_G = 19,6 \text{ N}$, ve vodě představuje hodnota na siloměru tahovou sílu, $T = 15,3 \text{ N}$. Z výše uvedeného vztahu pro rovnovážný stav můžeme vyjádřit objem tělesa:

$$F_G = T + \rho_2 Vg \Rightarrow V = \frac{F_G - T}{\rho_2 g}.$$

Na objem se ovšem neptáme, hustotu tělesa vyjádříme ze vztahu:

$$\rho_1 = \frac{m}{V}, \text{ kde } m = \frac{F_G}{g}. \text{ Po dosazení } \rho_1 = \frac{F_G \rho_2}{F_G - T} = 4\,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Hustota daného tělesa je $4\,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Př. 2

Použijeme těleso z předchozí úlohy. Vypočtete velikost tahové síly T' , bude-li těleso ponořené právě polovinou svého objemu.

Řešení:

Vztah pro rovnováhu sil bude pouze malinko upraven:

$$F_G = T' + \frac{1}{2} \rho_2 V g \Rightarrow T' = \frac{2F_G - \rho_2 V g}{2}.$$

Dosadíme za objem z předchozí úlohy: $T' = \frac{2F_G - F_G + T}{2} = \frac{F_G + T}{2} = 17,5 \text{ N}.$

Bude-li těleso ponořeno polovinou svého objemu, ukáže siloměr hodnotu 17,5 N.

Př. 3

Použijeme opět těleso z předchozích úloh. Určete v procentech, jakou částí objemu by těleso muselo být ponořeno, aby siloměr ukazoval hodnotu právě $T_1 = 18,0 \text{ N}.$

Řešení:

Označíme ponořenou část objemu xV (x bude desetinné vyjádření, v procentech to bude $100x \%$).

Opět napíšeme vztah pro rovnováhu sil:

$F_G = T_1 + \rho_2 x V g$, vyjádříme hodnotu x a zároveň dosadíme za objem V :

$$x = \frac{F_G - T_1}{F_G - T} = 0,37.$$

Aby siloměr ukazoval právě 18,0 N, musí být ponořeno 37 % objemu tělesa.

Úlohy pro samostatnou práci

1. Zlatý prsten je na rovnoramenných vahách ve vzduchu vyvážen závažím o hmotnosti $m_1 = 1,00 \text{ g}$. Jaká bude hmotnost závaží m_2 , kterým vyvážíme prsten ponořený do vody, je-li hustota zlata $\rho_1 = 19\,300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a hustota vody $\rho_2 = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$?
2. Na zavěšený kousek železa zcela ponořený ve vodě působí tahová síla 4,0 N. Určete objem kousku železa, je-li hustota železa $7\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a hustota vody $1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
3. Na těleso zavěšené na vlákne ponořené do vody působí tahová síla, která je rovna polovině síly tíhové. Určete hustotu tělesa.

Úlohy řešené pomocí Archimedova zákona III

V této části se budeme zabývat úlohami, kdy je v tělese dutina.

Př. 1

V dřevěném hranolku o hmotnosti $m = 0,20$ kg je uprostřed souměrná dutina o objemu V_x . Dřevo má hustotu $\rho_1 = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Hranolek je ponořený do kapaliny o hustotě $\rho_2 = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určete objem dutiny V_x , je-li hranolek ponořen do kapaliny právě 1/3 svého objemu.

Řešení:

Hustota dřeva je menší než hustota kapaliny, budeme tedy řešit rovnovážný stav mezi tíhovou a vztlakovou silou.

$$mg = \rho_2 \frac{V}{3} g, \text{ z toho pro objem celého tělesa plyne } V = \frac{3m}{\rho_2}.$$

..

Hmotnost hranolku je $m = \rho_1(V - V_x)$. Odsud objem dutiny je

$$V_x = V - \frac{m}{\rho_1}, \text{ po dosazení za } V \text{ a úpravě: } V_x = m \left(\frac{3}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Aby byl hranolek ponořen právě jednou třetinou svého objemu, musí mít dutina uprostřed hranolku objem $3,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.

Př. 2

Hliníkové koule o poloměru $r = 0,050$ m se soustřednou kulovou dutinou má hmotnost $m = 0,50$ kg. Určete hustotu kapaliny, v níž se koule volně vznáší.

Řešení:

Aby se koule v kapalině volně vznášela, musí mít kapalina stejnou hustotu jako je průměrná hustota koule:

$$\rho_2 = \rho_1 = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 950 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Dutá hliníková koule se bude volně vznášet v kapalině o hustotě $\rho_2 = 950 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Př. 3

Budeme mít shodnou kouli o jako v předchozí úloze, avšak vyrobenou z titanu. Jaká část objemu této titanové koule bude ponořena v kapalině o hustotě $\rho_2 = 1\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$? Hustota hliníku je $\rho_{Al} = 2\,700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota titanu $\rho_{Ti} = 4\,530 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $m_{Al} = 0,50$ kg.

Řešení:

Potřebujeme hmotnost titanové koule. Vzhledem ke stejnému objemu V kovů, z nichž jsou koule vyrobeny, platí:

$$V = \frac{m_{Ti}}{\rho_{Ti}} = \frac{m_{Al}}{\rho_{Al}} \Rightarrow m_{Ti} = \frac{\rho_{Ti}}{\rho_{Al}} m_{Al}.$$

Objem ponořené části označíme $x \cdot V = x \cdot 4\pi r^3/3$.

Opět napíšeme vztah pro rovnováhu tíhové a vztlakové síly:

$$m_{Ti}g = x \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_2 g, \text{ vyjádříme } x \text{ a dosadíme za } m_{Ti}:$$

$$x = \frac{3\rho_{Ti}m_{Al}}{4\rho_{Al}\pi r^3 \rho_2} = 0,89.$$

V dané kapalině bude ponořeno 89 % objemu duté titanové koule.

Úlohy pro samostatnou práci

1. Dutá ocelová krychle má délku hrany $a = 0,20$ m a tloušťku stěn $d = 0,0025$ m. Hustota oceli je $\rho_1 = 7\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota vody $\rho_2 = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určete, do jaké hloubky h je krychle ve vodě ponořena.
2. Ocelová krychle o stejné délce hrany jako v úloze 1 bude mít tloušťku stěn dvojnásobnou. Jaká tahová síla musí na kouli působit, aby byla koule ponořena do stejné hloubky jako v úloze 1? Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
3. Jaký by musel být objem dutiny v ocelové krychli z předchozích úloh, aby se krychle ve vodě vznášela?

5. Výsledky úloh

Úlohy řešené pomocí Archimedova zákona I

1. 48 kg, 2. 120 m^2 , 3. dřevo $600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, olej $960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Úlohy řešené pomocí Archimedova zákona II

1. 0,95 g, 2. $6,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, 3. $2\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Úlohy řešené pomocí Archimedova zákona III

1. 0,11 m, 2. 42 N, 3. $7,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

Použitá literatura

BEČVÁŘ, Jindřich a ŠTOLL, Ivan. *Archimedes: největší vědec starověku*. Velké postavy vědeckého nebe. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-273-2.

BEDNAŘÍK, Milan a ŠIROKÁ, Miroslava. *Fyzika pro gymnázia: mechanika*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001 dotisk. ISBN 80-7196-176-0.

LEPIL, Oldřich; BEDNAŘÍK, Milan a ŠIROKÁ, Miroslava. *Fyzika: sbírka úloh pro střední školy*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 807196266X.

MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-264-3.

BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy I*. 1. [sv.], Mechanika. Učebnice pro střední školy. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-033-0.